

20

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الأول للعام الدراسي 2015-2016

كلية العلوم- قسم الرياضيات

المسألة الأولى: (13 درجة)

إذا كان $z \neq 1$ و $|z|=1$ فاثبت أن

$$\frac{2}{1-z} = 1 + i \cot \frac{\alpha}{2}$$

المسألة الثانية: (20 درجة)

$$f(z) = x^3 - 6xy + i(6xy - y^3)$$

إذا كان

والمطلوب : 1- -تعيين النقاط التي تكون عندها الدالة قابلة للاشتقاق

2- - حساب قيمة المشتقة عند هذه النقاط وهل هذه الدالة تحليلية عندها.

المسألة الثالثة: (10+10=20 درجة)

$$\log z = \text{Log}(r) + i\varphi$$

$$\frac{17\pi}{4} < \varphi < \frac{25\pi}{4}$$

1- - ليكن

$$\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2, \quad 2\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

ثم قارن بينهما .

$$\sin z = 3$$

2- - اعتماداً على الدوال العكسية أوجد جنور المعادلة

المسألة الرابعة: (20 درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ فوق النقاط

$w_1 = \infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ على الترتيب ما هي النقاط الثابتة لهذه التحويلة ثم أوجد خيال

المستقيم $y = 0$ وفق هذه التحويلة .

المسألة الخامسة: (17+10=27 درجة)

$$I_1 = \int_{|z+1-i|=3} \frac{z-1}{z^4 + (5-2i)z^3 + (5-5i)z^2} dz$$

أوجد قيمة التكاملين

$$I_2 = \int_{|z|=a} \frac{b+z}{bz-z^2} dz \quad 0 < a < b$$

مدرس المقرر

د. رامي الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية مع سلم درجات مادة التحليل العقدي/1/ الفصل الأول 2015-2016

جواب السؤال الأول : (13 درجة)

$$z \neq 1 \wedge |z|=1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi \quad 3$$

بما أن

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{2[(1-\cos\theta) + i\sin\theta]}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{2[(1-\cos\theta) + i\sin\theta]}{2(1-\cos\theta)} \quad 5$$

$$\frac{2}{1-z} = 1 + i \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)} = 1 + i \frac{2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1 + i \cot\frac{\theta}{2} \quad 5 \text{ ومنه فإن}$$

جواب السؤال الثاني: 20=6+14 درجة

$$u(x, y) = x^3 - 6xy \quad \wedge \quad v(x, y) = 6xy - y^3 \quad (14)$$

$$u_x = 3x^2 - 6y \quad \wedge \quad v_y = 6x - 3y^2 \quad \wedge \quad u_y = -6x \quad \wedge \quad v_x = 6y \quad 6$$

نلاحظ أن هذه المشتقات موجودة ومستمرة وتحقق شرطاً كوشي ريمان عندما

$$3x^2 - 6y = 6x - 3y^2 \quad \wedge \quad 6y = 6x \quad 6$$

المعادلتين هو (0,0) و (2,2) أي أن الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق عند هاتين النقطتين

$$2 \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 6y + i6y \quad 2 \text{ بما أن}$$

$$1+1 \quad f'(0) = 0 \quad \wedge \quad f'(2+i2) = 12i$$

فإن

والدالة المعطاة غير تحليلية عند هاتين النقطتين لأن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند أي نقطة من نقاط جوار ما لكل من هاتين النقطتين .

جواب السؤال الثالث : (20=10+10 درجة)

$$4 \quad 2 \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 2 \left[\underbrace{\log\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right|}_{\log 1 = 0} + i \frac{37\pi}{6} \right] = i \frac{37\pi}{3} \quad (15)$$

2 $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^2 \neq 2\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ ونلاحظ أن

جواب السؤال الرابع : $(8+6+6=20 \text{ درجة})$

وبما أن $w_1 = \infty$ نعوض كل w_1 بـ $\frac{1}{w_1}$ ومن ثم نوحّد المقامات ونختصر فنجد أن

$$2 \Rightarrow z-1=wz+w-z-1 \Rightarrow w = \frac{2z}{z+1} \quad \text{أي أن}$$

ومنه فإن $z = 0$ $z = 1$ هي النقاط الثابتة . $1 \neq 1$

الخيال هو المستقيم المار من هاتين النقطتين أي أن الخيال هو المستقيم $v = 0$

طريقة ثانية :

$$1+1 \quad w = \frac{2z}{z+1} \Rightarrow z = \frac{-w}{w-2} \Rightarrow x+iy = \frac{-u-iv}{u-2+iv} \quad \text{بما أن}$$

$$2+1 \quad x+iy = \frac{2u-u^2-v^2}{(u-2)^2+v^2} + i \frac{2v}{(u-2)^2+v^2} \Rightarrow y = \frac{2v}{(u-2)^2+v^2} \quad \text{أي أن}$$

وبما أن $y=0 \Leftrightarrow v=0$ أي أن الخيال هو المستقيم الأفقي .

جواب السؤال الخامس : $27=10+17$ درجة

2

1- الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها $(-1,1)$ ونصف قطرها $R=3$

نقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة

$$2 \quad z^4 + (5-2i)z^3 + (5-5i)z^2 = 0 \Rightarrow z^2(z^2 + (5-2i)z + 5-5i) = 0$$

$$1+1 \quad z=0 \wedge z^2 + (5-2i)z + 5-5i = 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

$$3 \quad \Delta = (5-2i)^2 - 4(5-5i) = 1 \Rightarrow z_1 = -3+i \wedge z_2 = -2+i$$

وبما أن جميع النقاط الشاذة تقع في داخلية الكفاف ودرجة المقام أكبر من درجة البسط ب3

5 فنعين قيمة هذا التكامل تكون مساوية للصفر أن $I_1 = 0$

2- النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $bz - z^2 = 0$ أي أن

$$1+1 \quad z(b-z) = 0 \Rightarrow z=0 \wedge z=b$$

وبالتالي فإن

$$I_2 = \int_{|z+1-i|=3} \frac{b+z}{z(b-z)} dz = \int_{|z+1-i|=3} \frac{\frac{b+z}{b-z}}{\frac{z}{b-z}} dz = 2\pi i \left[\frac{b+z}{b-z} \right]_{z=0}^1 = 2\pi i$$

مدرس المقرر

د. رامي الشيخ فتوح

السؤال الأول : (١٠+١٠+١٠+١٠+١٠=٥٠ درجة)

١- "تحقق هندسياً من أن العلاقة $|z-3| - |z+3| = 4$ تمثل قطعاً زائداً" ثم أثبت هذا جبرياً.٢- إذا كان $z = re^{i\theta}$ $-\pi < \theta \leq \pi$ فاثبت أن

$$z^n = e^{-i(n\theta + 2n\pi)} \{ \cos(\log r) + i \sin(\log r) \} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$e^{\pm i} = 1 + i\sqrt{3}$$

٣- أوجد جميع جذور المعادلة ✓

$$v(x, y) = x^2 - 2y$$

٤- أثبت أنه لا توجد دالة تحليلية قسمها التخيلي هو الدالة

$$|z| + \operatorname{Re}(z) \leq 1$$

٥- أين تقع النقاط $z = x + iy$ التي تحقق العلاقة

السؤال الثاني : (١٠+١٠=٢٠ درجة)

١- أوجد صورة الشريحة اللانهائية $(0 < y < 2, x > 0)$ وفق التحويلة $w = iz + 1$ ٢- أوجد التحويلة الخطية-الكسرية التي تنقل النقاط $z_3 = \infty, z_2 = i, z_1 = 0$ فوق النقاط $w_3 = 0, w_2 = i, w_1 = \infty$ على الترتيب.

السؤال الثالث : (١٢+١٣=٢٥ درجة)

١- أوجد جميع قيم $\arg(\sqrt{3} - i)$ وكذلك جميع قيم $\arctan(1 + i)$ ✓٢- عرف الدالة $f(z) = \frac{z^3 + 2z - i}{z - i}$ عند النقطة $z = i$ لتصبح مستمرة عندها ثم أوجد $f'(2i)$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول، $\boxed{50 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1}$ مستورد

١- العلاقة $|z-3| - |z+3| = 4$

٢- نلاحظ بأنه من الأفضل أن نأخذ مركزاً غير فيصل بمحورته نظام الإحداثيات
 نرى أنه لا سنحتاج إلى تغيير الإحداثيات بل $(-3, 0)$ و $(3, 0)$
 ولذا هو من حيث الشكل أكثر
 جبراً، لنفعل ذلك $z = x + iy$ حيث

١ $|x-3+iy| - |x+3+iy| = 4$

٢ $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 4$

٣ $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4 + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$ نضرب الطرفين

٤ $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 16 + 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$ أنقل

٥ $\begin{cases} -12x - 16 = 8\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \\ -3x - 4 = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \end{cases}$ نضرب الطرف الثاني

٦ $\begin{cases} 9x^2 + 24x + 16 = 4[x^2 + 6x + 9 + y^2] \\ 9x^2 + 24x + 16 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \end{cases}$

٧ $5x^2 - 4y^2 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ وهي صورة قطع زائد

٨ $z^c = e^{c \log z}$ e^c - نعلم أنه

٩ $z^i = e^{i \log z}$ - بيان أن

١٠ $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ n - أي عدد صحيح

آیاتی

$$3 \quad z^i = e^{-(0 + i \ln x) + i \operatorname{Log} r}$$

$$3 \quad = e^{-(0 + i \ln x)} [\cos \operatorname{Log} r + i \sin \operatorname{Log} r] \quad \text{نسبت ۱:۲:۳}$$

نهایتاً، لیج بجا رهنه در الماسالم.

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

۱۰ ترکان $z = x + iy$ نسبت

$$1 \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

رشته یابی

$$1 \quad e^x \cos y + i e^x \sin y, 1 + i\sqrt{3}$$

آیاتی

$$1 (1) \quad e^x \cos y = 1$$

$$1 (2) \quad e^x \sin y = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan y = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$1 \quad y = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$1 \quad e^{2x} = 4$$

برای یک ربع (۱) و (۲) بفرمان

آیاتی

$$1 \quad 2x = \operatorname{Log} 4 \Rightarrow x = \operatorname{Log} 2$$

رشته یابی در اول این دانه

$$2 \quad z = \operatorname{Log} 2 + i \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi \right) \quad \text{نسبت ۱:۲:۳}$$

رابطه یابی نیز می باشد

$$2 \quad \int \left(\text{دانه یابی} \right) \quad \text{نسبت ۱:۲:۳} \quad \text{رابطه یابی} \quad u = u(x, y) \quad \text{در } u = u(x, y) \quad \text{در } u = u(x, y)$$

$$u(x, y) = x^2 - 2y$$

$$(1+1+1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2 \quad \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

هنا نريد بناء الدالة بترتيبها لكي نأخذ الدالة
 $f(z) = u + i v$ حيث $z = x + i y$
 نريد دالة تحليلية
 أي نأخذ الدالة u ونحللها باستخدام معادلة كوشي-ريمان
 $v(x, y) = x^2 - y^2$

فأول شرط هو أن $z = x + i y$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\text{Re } z = x$
 أي أن

$$1 \quad \sqrt{x^2 + y^2} + x \leq 1$$

$$2 \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - x \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 - 2x + x^2$$

$$2 \quad y^2 \leq 1 - 2x \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} y^2$$

جواب السؤال الثاني: $25 = 10 + 15$ خمسة عشر

أ- نضع $u = x + i y$ ونفرض $z = x + i y$
 $1 \quad u + i v = -y + i x + 1 = 1 - y + i x$
 أي أن

$$1 + i \quad y = 1 - y \quad x = x$$

$$2 \quad x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$2 \quad -2 < -y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 2$$

$$2 \quad -1 < 1 - y < 1$$

$$2 \quad -1 < u < 1$$

أي أن المجال $x > 0, 0 < y < 2$ في مجموعة النقاط
 $3 \quad -1 < u < 1, u > 0$

ج- التحويل إلى الشكل

(15)

$$1 \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

نذكر شكل z_3 بـ $\frac{1}{z_3}$ وكل w_1 بـ $\frac{1}{w_1}$ بنقطة

$$2 \quad \frac{w-\frac{1}{w_1}}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-\frac{1}{w_1}} = \frac{z-z_1}{z-\frac{1}{z_3}} \cdot \frac{z_2-\frac{1}{z_3}}{z_2-z_1}$$

$$2 \quad \frac{w_1 w - 1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_1 w_2 - 1} = \frac{z - z_1}{z_3 z - 1} \cdot \frac{z_2 z_3 - 1}{z_2 - z_1}$$

نذكر w_1 بالعدد i ونذكر z_3 بالعدد i بـ z_3 بـ i بنقطة

$$2 \quad \frac{0-1}{w-i} \cdot \frac{i-0}{0-1} = \frac{z-0}{0-1} \cdot \frac{0-1}{i-0}$$

$$1 \quad \frac{i}{w} = \frac{z}{i} \Rightarrow \frac{w}{i} = \frac{i}{z}$$

$$1 \quad w = -\frac{1}{z}$$

أي أنه

هو التحويل المطلوب

جواب السؤال الثاني: $25 = 13 + 12$ محمد برون

$$1 \quad \arg z = \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{نعم أنه نعم أنه}$$

$$(4) \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$141 \quad \tan \theta = -\tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan \theta = \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

أي أنه

$$1 \quad \arg z = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$1 \quad z \neq \pm i \quad \operatorname{arctan} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z} \quad \text{کدام است}$$

$$1+1 \quad \operatorname{arctan}(1+i) = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+1+i}{i-1-i} \right) = \frac{i}{2} \log(-1-2i)$$

$$1 \quad = \frac{i}{2} \left[\log|-1-2i| + i(\theta + 2n\pi) \right] \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$1 \quad = -i\left(\frac{\theta}{2} + n\pi\right) + \frac{i}{4} \log 5$$

$$1 \quad \tan \theta = 2 \quad n - \pi < \theta < -\frac{\pi}{2} \quad \text{رجه}$$

$$2 \quad \lim_{z \rightarrow b_0} f(z) = f(b_0) \quad \text{فني تدریج اولیه مستوی این یارینه} \quad \text{نقشه} \quad (13)$$

$$4 \quad \lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + 2z - i}{z - i} = \frac{0}{0}$$

$$4 \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^2 + 2}{1} = -3 + 2 = -1$$

اولیه تدریج اولیه مستوی

$$2 \quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 + 2z - i}{z - i} & z \neq i \\ -1 & z = i \end{cases}$$

نقشه تدریج اولیه مستوی

$$2 \quad f'(z) = \frac{(3z^2 + 2)(z - i) - (z^3 + 2z - i)}{(z - i)^2}$$

$$3 \quad f'(i) = \frac{(-12 + 2)(i) - (-2 + 2i - i)}{(2i - i)^2} = \frac{-10i + 5i}{-1} = \frac{-5i}{-1} = 5i$$

نقشه تدریج اولیه مستوی

للمعلم

بجامعة البصرة
قسم الرياضيات الفصل الأول للعام الدراسي 2014-2015

السؤال الأول : (25=13+12 درجة)

1- أكتب العدد العقدي $z = 1 + i \cot \alpha$ ، حيث $0 < \alpha < \pi$ ، بالشكل القطبي .

2- عين المحل الهندسي لمجموعة قيم z التي تحقق العلاقة $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$.

السؤال الثاني : (25=13+12 درجة)

1- بفرض أن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فأثبت أن

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2 .$$

2- أثبت أن الدالة $u(x, y) = 4x(1-y)$ دالة توافقية ثم أوجد المرافق

التوافقي لها ثم عبر عن الدالة التحليلية بدلالة z .

السؤال الثالث : (25=12+13 درجة)

1- إذا كان $z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$ فأوجد قيمة $\text{Log}(z^2 - 1)$ ✓

2- أوجد جميع قيم المقادير $\arctan(-\frac{2+i}{5})$ و $\text{arcth}(\frac{3+2\sqrt{3}}{7})$ ✓

السؤال الرابع : (25=11+14 درجة)

1- أوجد التحويلة الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 0, z_2 = -\frac{i}{2}, z_3 = i$ فوق

النقاط $w_1 = -\frac{i}{2}, w_2 = 0, w_3 = -i$ على الترتيب ثم أوجد خيال $|z| \leq 1$.

2- أوجد خيال المستقيم $y = -x + 1$ وفق التحويلة $w = z^2$.

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول : (12+13=25 درجة)

1 - بما أن $z = 1 + i \cot \alpha$ عند $x = 1$ و $y = \cot \alpha$ وبالتالي فإن $\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot \alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ و $r = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$ (12)

3 و $\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot \alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ و $r = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$

1 أي أن $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ وبالتالي فإن الشكل القطبي للعدد المعطى يكون

3 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1}{\sin \alpha} [\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)]$

1 + 1 "2 - إذا فرضنا أن $z = x + iy$ فعندئذ $\left| \frac{x + iy - 3}{x + iy + 3} \right| = 2$ ومنه فإن (13)

6 $(x - 3)^2 + y^2 = 4[(x + 3)^2 + y^2] = 4x^2 + 4y^2 + 24x + 36$

2 أي أن $3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$ ومنه $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

3 أي $(x + 5)^2 + y^2 = 16$ وهي معادلة دائرة مركزها $(-5, 0)$ وتصف قطرها $R = 4$

جواب السؤال الثاني : (13+12=25 درجة)

1 - بفرض أن $f(z) = u + iv$ عندئذ $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ (13)

1 وبالتالي فإن $\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

1 أي $\frac{\partial}{\partial x} |f(z)|^2 = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

1 ومنه فإن $\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 = 2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + 2v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

$$1 \quad \frac{\partial}{\partial y} |f(z)|^2 = (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$2 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{أي أن}$$

$$1 \quad + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \wedge \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ولكن بما أن الدالة تحليلية فعندئذ}$$

$$1 + 1 \quad \text{وكذلك فإن } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{بالإستفادة من هذه العلاقات نجد أن}$$

$$2 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^2 = 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 4|f'(z)|^2$$

وهو المطلوب .

$$1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 4(1-y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -4x \quad \text{فنعين } u(x, y) = 4x(1-y) \quad \text{بما أن } (13)$$

$$1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{وبما أن هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة و}$$

$$1 \quad \text{تحقق معادلة لابلاس التفاضلية } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{فالدالة المعطاة هي دالة توافقية}$$

$$1 + 1 \quad \text{لإيجاد المرافق التوافقي لها نعلم أن } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{أي أن } \frac{\partial v}{\partial y} = 4 - 4y \quad \text{بالمكاملة}$$

لـ $\varphi(x) = 2x^2 + c$ $\varphi'(x) = 4x$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ وبما أن $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$

\ + 1 $\varphi(x) = 2x^2 + c$ ومنه $\varphi'(x) = 4x$ فإن $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ وبما أن $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$

لـ أي أن $v(x, y) = 4y - 2y^2 + 2x^2 + c$ وهو المرافق التوافقي وبالتالي فإن

لـ $f(z) = 4x - 4xy + i(4y - 2y^2 + 2x^2 + c)$

لـ أي $f(z) = 4z + i2z^2 + ic$

جواب السؤال الثالث : $25 = 12 + 13$ درجة

3 + 3 $z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}} \Rightarrow z^2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \Rightarrow z^2 - 1 = i$ 13

2 + 2 + 3 $\text{Log}(z^2 - 1) = \text{Log} i = \text{Log} |i| + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$ ومنه فإن

لـ * $\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}, z \neq \pm i$ 2 - بما أن

\ + 1 $\arctan(-\frac{2+i}{5}) = \frac{i}{2} \log \frac{i - \frac{2+i}{5}}{i + \frac{2+i}{5}} = \frac{i}{2} \log \frac{-2+4i}{2+6i} = \frac{i}{2} \log \frac{-1+2i}{1+3i}$ فإن

\ + 1 $= \frac{i}{2} \log \frac{(-1+2i)(1-3i)}{10} = \frac{i}{2} \log \frac{1+i}{2} = \frac{i}{2} [\text{Log} \left| \frac{1+i}{2} \right| + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)]$

لـ $= -(\frac{\pi}{8} + n\pi) + i \text{Log} \frac{1}{\sqrt{2}}$

لـ * $\text{arcthz} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1$ بما أن

$$\backslash + \backslash \quad \operatorname{arctanh}\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{3+2\sqrt{3}}{7}}{1 - \frac{3+2\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{2} \log \frac{10+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \log \frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \text{فإن}$$

$$\backslash + \backslash \quad = \frac{1}{2} \log(13+7\sqrt{3}) = \frac{1}{2} [\operatorname{Log} |13+7\sqrt{3}| + i(0+2n\pi)]$$

$$\perp \quad = \operatorname{Log} \sqrt{13+7\sqrt{3}} + i n\pi$$

جواب السؤال الرابع : (14 + 11 = 25 و 25)

$$\backslash \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad \text{1 - التحويلة المطلوبة هي من الشكل}$$

(14)

$$\backslash + \backslash \quad \frac{w + \frac{i}{2}}{w + i} \cdot \frac{0+i}{0+\frac{i}{2}} = \frac{z-0}{z-i} \cdot \frac{-\frac{i}{2}-i}{-\frac{i}{2}-0} \quad \text{نعرض في القيم المعطاة فنجد}$$

$$\backslash + \backslash \quad \frac{2w+i}{w+i} = \frac{3z}{z-i} \Rightarrow (2w+i)(z-i) = 3z(w+i)$$

$$\perp \quad 2zw - 2iw + iz + 1 = 3zw + 3iz$$

$$\backslash + \backslash \quad w(z+2i) = 1-2iz \Rightarrow w = \frac{1-2iz}{z+2i}$$

$$\perp \quad z = \frac{-2iw+1}{w+2i}$$

وهي التحويلة المطلوبة لإيجاد الخيال لدينا

$$\backslash + \backslash \quad |-2iw+1| \leq |w+2i| \Rightarrow (2v+1)^2 + 4u^2 \leq u^2 + (v+2)^2$$

أي أن

$$2 + \backslash \quad 3u^2 + 3v^2 \leq 3 \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$$

أي أن

2- بما أن $w = z^2$ فإن $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ وبالتالي فإن خيال المستقيم $y = -x + 1$ هو مجموعة النقاط

و $u = x^2 - (-x + 1)^2 = 2x - 1$ من الأولى نجد أن

$$x = \frac{u+1}{2}$$

$$v = 2\left(\frac{u+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-u+1}{2}\right) = \frac{1-u^2}{2} \Rightarrow v - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}u^2$$

أي أن الخيال هو قطع مكافئ ذروته $(0, \frac{1}{2})$ وتقع مركزه في $v = 0$.

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الدورة الصيفية للعام الدراسي 2013-2014

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول : (13 + 13 + 13 + 13 = 52 راجع)

1- اكتب العدد العقدي $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ بالشكل القطبي . ✓

2- أوجد حلول المعادلة $z^3 + 8 = 0$ ✓

3- عبر عن القسم الحقيقي والقسم التخيلي للدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ بدلالة x, y . ✓

4- إذا كان $w_1 = e^{-iz}$ و $w_2 = e^{\frac{1}{z^2}}$ فأثبت أن $|w_1 + w_2| \leq e^y + e^{xy}$ ✓

السؤال الثاني : (15 + 13 + 20 = 48 راجع)

1- لتكن لدينا الدالة $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ عين مجموعة النقاط التي ✓

تكون عندها هذه الدالة قابلة للاشتقاق وهل هذه الدالة تحليلية عند هذه النقاط ، لماذا

2- باستخدام الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\cos z = \sqrt{2}$ ✓

3- أوجد التحويلة الكسرية التناظرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$ و $z_2 = \infty$ و $z_3 = -i$ ✓

فوق النقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = 1$ و $w_3 = \infty$ ثم أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة

النتيجة .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية لأسئلة امتحان مقرر التحليل العقدي/1/ (الدورة الصيفية للعام الدراسي 2013-2014)

جواب السؤال الأول : (13+13+13+13=52 درجة)

1- الشكل القطبي للعدد العقدي هو $z = R (\cos \theta + i \sin \theta)$ 2

حيث $R = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge \tan \theta = \frac{y}{x}$ 2

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$$

1+1+1 $R = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$

1+1+1 $\tan \theta = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

وبالتالي الشكل القطبي للعدد العقدي المعطى هو $z = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) \right]$ 2

1+1 $z^3 + 8 = 0 \Rightarrow z^3 = -8 \Rightarrow z = (-8)^{\frac{1}{3}}$ 2

نكتب العدد العقدي -8 بالشكل القطبي $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ 2

3 $(-8)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}) : k = 0, 1, 2$ ومنه فإن

من أجل $k = 0$ نجد $z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$ 1+1

من أجل $k = 1$ نجد $z_1 = 2(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3}) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$ 1+1

من أجل $k = 2$ نجد $z_2 = 2(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$ 1+1

2 //

1+2 $z = x + yi \Rightarrow -\frac{1}{z} = -\frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}$ 3- بفرض أن

وبالتالي فإن

1+3 $f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = e^{-\frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}} = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}} \left(\cos \frac{y}{x^2+y^2} + i \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right)$

3 $\text{Re}f(z) = u(x, y) = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}$ ومنه فإن

3 $\text{Im}f(z) = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \frac{y}{x^2+y^2}$

4- بفرض أن $z = x + iy$ عندئذ $w_1 = e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} \Rightarrow |w_1| = e^y$

4 $w_2 = e^{\frac{i}{2}z^2} = e^{\frac{i}{2}(x^2-y^2+2ixy)} = e^{xy + \frac{i}{2}(x^2-y^2)} \Rightarrow |w_2| = e^{xy}$

2 $|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|$ ولكن نعلم أن

3 $|w_1 + w_2| \leq e^y + e^{xy}$ لذلك فإن

جواب السؤال الثاني : (15+13+20=48 درجة)

1- تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية لكل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي-ريمان

1+1 $u(x, y) = x^2 + y \wedge v(x, y) = y^2 - x$ ولدينا

1+1+1+1 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -1$ ومنه فإن

ونلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق شرطاً كوشي - ريمان

$$1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

3 فقط عند نقاط المستقيم $y = x$ أي أن الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق فقط عند نقاط المستقيم

$y = x$ ولكن أي جوار لأي نقطة من هذا المستقيم نلاحظ أنه يحتوي على نقاط تكون الدالة

4 المعطاة قابلة للاشتقاق عند بعضها وغير قابلة للاشتقاق عند بعضها الآخر لذلك فإن هذه الدالة غير تحليلية عند أي نقطة في المستوى العقدي .

$$3 \quad \cos z = \sqrt{2} \Rightarrow z = \arccos \sqrt{2} \quad \text{"2 - بما أن}$$

$$3 \quad \arccos w = -i \log(w + i\sqrt{1-w^2}) \quad \text{ولكن نعلم أن}$$

$$3 + 3 \quad \arccos \sqrt{2} = -i \log(\sqrt{2} + i\sqrt{1-2}) = -i \log(\sqrt{2} + i\sqrt{-1}) = -i \left[\text{Log}(\sqrt{2} + i) + i2n\pi \right]$$

$$1 \quad z = 2n\pi - i \text{Log}(\sqrt{2} + i) \quad \text{ومنه فإن}$$

3 - التحويلة الكسرية الخطية التي تنقل النقاط z_1, z_2, z_3 فوق النقاط w_1, w_2, w_3

$$2 \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad \text{هي من الشكل}$$

1 نعوض في هذه العلاقة كل z_2 ب $\frac{1}{z_2}$ وكل w_3 ب $\frac{1}{w_3}$ فنجد أن

$$2 \quad \frac{w-w_1}{w-\frac{1}{w_3}} \cdot \frac{w_2-\frac{1}{w_3}}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{\frac{1}{z_2}-z_3}{\frac{1}{z_2}-z_1}$$

$$2 \quad \frac{w-w_1}{w_3 w - 1} \cdot \frac{w_3 w_2 - 1}{w_2 - w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{1-z_2 z_3}{1-z_2 z_1} \quad \text{بالإصلاح نجد}$$

2

$$\frac{w-0}{0-1} \cdot \frac{0-1}{1-0} = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{1-0}{1-0}$$

بالتعويض نجد

1

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

أي أن

رهي التحويل المطلوبة

2

$$z = \frac{iw+i}{1-w}$$

لإيجاد خيال المستقيم $y=0$ من التحويل الناتجة نجد

1

بفرض أن $z = x + iy \wedge w = u + iv$ يكون

4

$$x + iy = \frac{-v + i(u+1)}{(1-u) - iv} = \frac{-2v}{(1-u)^2 + v^2} + i \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2 + v^2}$$

2

$$y=0 \text{ وبما أن } y = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2 + v^2} \text{ واستناداً إلى تساوي عددين عقديين يكون}$$

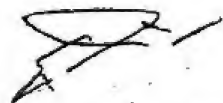
1

$$u^2 + v^2 = 1 \text{ هو خيال المستقيم } y=0 \text{ وفق التحويل الناتجة}$$

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح



٢١ / ٥ / ١٤٠٢

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الثاني للعام الدراسي 2013-2014

كلية العلوم - قسم الرياضيات

=====

أجب عن الأسئلة الآتية : (10+15+15+15+10+15+10=100 درجة)

1- أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي $z = 8i$

2- إذا علمت أن $z = 2i$ هو أحد جذور المعادلة $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8 = 0$

فأوجد الجذور الثلاثة الباقية .

3- بفرض أن $z = x + iy$ فأثبت أن الدالة $u(x, y) = \operatorname{Im} e^{z^2}$ هي دالة توافقية .

4- بفرض أن $f(z)$ مستمرة في النقطة z_0 فهل $\bar{f}(z)$ مستمرة في z_0 ولماذا .

5- باستخدام الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\sin z = 2$

$\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$

6- أثبت أن

7- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$ و $z_2 = 1$ و $z_3 = -i$ فوق النقاط

$w_1 = 0$ و $w_2 = -i$ و $w_3 = \infty$ ثم أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة .

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

7

جواب السؤال الأول (10) بالنسبة العدد المعكوس

$$1 \quad 8i = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$3 \quad (8i)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right] \quad k=0,1$$

$$3 \quad z_1 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right] = 2 + 2i$$

سواء 1: كما يكون الجذر الثاني

$$3 \quad z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right] = 2\sqrt{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right] = -2 - 2i$$

جواب السؤال الثاني (5) مندرج هكذا

بما أنه $z_1 = 2 - 2i$ هو الجذر المعكوس المضاد لنفسه $z_2 = -2 + 2i$
لهذا جتا هذا آخر المعادلة $z^2 + 4 = 0$

$$(z - 2i)(z - z_2) = (z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$$

بما أن z_1 هو الجذر المعكوس المضاد لنفسه

$$(z^2 + 4)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$z_1 = -2i, \quad z_2 = 2i \quad \text{من } z^2 + 4 = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$z_3 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_4 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

أي أنه هذا هو الجذر

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = 1 - i$$

بسم الله الرحمن الرحيم

2. مجلسه لشکر المعلمه للاستیع اداره

$$e^z = u(x, y) + i v(x, y)$$

2
 2
 2

$u(x,y) = \sin e = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2y e^{x^2-y^2} \cos 2xy$

$$2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2y e^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

$$2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2xe^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

$$2 \frac{\partial u}{\partial y^2} = -2e^{x^2-y^2} \sin 2xy + 4ye^{x^2-y^2} \sin 2xy - 4xye^{x^2-y^2} \cos 2xy - 4xye^{x^2-y^2} \cos 2xy - 4x^2e^{x^2-y^2} \sin 2xy$$

ر. هـ: المستات البرزخية انما هي منزهة عن سائر صفات الجاهل بآية

$$2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

15

جواب السؤال الثاني (15) $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

نكتب $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

نكتب $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

2 $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

2 $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

5 $f(z) = u + iv$ حيث $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ $f(z) = z^2$

3 $\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$

2 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

3 $z = \arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$

$= -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$

3 $= -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$

3 $= -i \log |iz + \sqrt{1-z^2}| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)$

3 $\frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \log(2 + \sqrt{3})$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

جواب السؤال الثالث (15) $f(z) = \log z$

$\log(-1+i)^2 = \log(-2i) = \log|-2i| + i \frac{3\pi}{2}$

5 $= \log 2 - i \frac{\pi}{2}$

$2 \log(-1+i) = 2 \left[\log|-1+i| + i \frac{3\pi}{4} \right]$

5 $= 2 \left[\log \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4} \right]$

$= \log 2 + i \frac{3\pi}{2}$

5 $\log(-1+i)^2 \neq 2 \log(-1+i)$

دالة التحويل $z \mapsto w$

$$1 \quad \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{z_2 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

نموذج 1: $w_1 = 0, w_3 = 1, z_1 = i, z_3 = -i$

$$1 \quad \frac{w - 0}{w - 1} \cdot \frac{z_2 - 1}{z_2 - 0} = \frac{z - i}{z - (-i)} \cdot \frac{z_2 - i}{z_2 - (-i)}$$

$$1 \quad \frac{w}{w - 1} \cdot \frac{z_2 - 1}{z_2} = \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{z_2 - i}{z_2 + i}$$

نموذج 2: $w_1 = 0, w_3 = 1, z_1 = i, z_3 = -i$

$$1 \quad \frac{w - 0}{w - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - i} = \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{1 + i}{1 - i}$$

$$2 \quad w = -i \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{(1 + i)^2}{2} = -i \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{2i}{2}$$

$$3 \quad w = \frac{z - i}{z + i}$$

دالة التحويل العكسية

$$2 \quad z = \frac{-iw - i}{w - 1}$$

$$2 \quad x + iy = \frac{v - i(u - i)}{u - 1 + iv} \cdot \frac{v - i(u + i)}{(u - 1) + iv}$$

$$2 \quad x + iy = \frac{[v - i(u + i)][(u - 1) - iv]}{(u - 1)^2 + v^2} = \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{-u^2 - u^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2}$$

$$2 \quad y = \frac{-u^2 - u^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \quad \text{معادلة 1}$$

$$u^2 + v^2 = 1$$

2

معادلة 2

معادلة 3

معادلة 4

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الأول للعام الدراسي 2013-2014

كلية العلوم - قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية (100=10+15+10+15+15+10+12+13 درجة)

1- أوجد الجذور التكعيبية بالشكل $a+ib$ حيث $a, b \in R$ للعدد العقدي $4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}$.

2- إذا علمت أن $z_1 = 1+2i$ هو أحد جذور المعادلة $z^4 - 3z^3 + 8z^2 - 7z + 5 = 0$

فأوجد الجذور الثلاثة الباقية.

3- إذا كان $f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-i}$ عندما $z \neq i$ فاعرف هذه الدالة عند

$z = i$ لتصبح هذه الدالة مستمرة عندها.

4- إذا كان $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i6x(2y-1)$ و $f(0) = 3-2i$ فاحسب $f(1+i)$.

5- إذا كان $z = x+iy$ و $u+iv = \tan z$ فاثبت أن

$$v = \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad \text{و} \quad u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

6- إذا كان $\log z = \text{Log } r + i\theta$ حيث $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{8\pi}{3}$ و $r > 0$ فاحسب

$\log(-1+i)^2$ و $2\log(-1+i)$ ثم قارن بينهما.

7- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1$ فوق النقاط

$\omega_1 = -1, \omega_2 = \frac{4+3i}{5}, \omega_3 = 1$ ثم أوجد خيال $|z| \leq 1$ وفق التحويلة الناتجة.

8- أوجد خيال $\omega = \frac{1}{z}$ وفق التحويلة $(0 \leq x, 0 \leq y \leq 2)$.

انتهت الأسئلة
أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر
د. رامي البعز فترع

جواب سوال اول [13] بارشده درج

$$2 \begin{cases} 4\sqrt{2} + i4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(1+i) \\ 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ 4\sqrt{2} + i4\sqrt{2} = 8 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

دانش
امکان

$$2 \left\{ (4\sqrt{2} + i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 2 \left[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + ik\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + ik\pi}{3} \right] \right. \quad k=0,1,2$$

مضامین k - کارت

$$3 \begin{cases} z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ = 2 \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right] = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

مضامین $k=1$ - کارت

$$3 \begin{cases} z_1 = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right] = 2 \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right] \\ = 2 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{cases}$$

مضامین $k=2$ - کارت

$$3 \begin{cases} z_2 = 2 \left[\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right] \\ = 2 \left[\cos \left(\pi + \frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{5\pi}{12} \right) \right] = 2 \left[-\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right] \\ = 2 \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right] = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1-2

2

جواب السؤال الثاني [12] انا عن نسخة
بما أنه جذر للمعادلة فنحن نبحث
عن الجذور المركبة
 $z_2 = 1 - 2i$ يتركها أيضا 2

$$2 \left\{ \begin{aligned} &(z - z_1)(z - z_2)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i) \\ &= z^2 - 2z + 5 \end{aligned} \right.$$

منه المعادلة المعكودة تأتي بالمثل

$$2 \quad (z^2 - 2z + 5)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 - 2i$$

1

$$z^2 - z + 1 = 0 \quad \text{رابطا}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

2 + 2

$$z_3 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z_4 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

وهي جذور المعادلة المعكودة

جواب السؤال الثالث [10] نسخة
تأثير الدالة عند z لذا اوقفنا ان $f(z)$ عند $z \rightarrow z_0$

$$3 \left\{ \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= L \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} &= \frac{3 + 2i - 8 - 2i + 5}{i - i} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned} \right.$$

ممكن تبسيط
نزل عن البسط ما شئنا اربطنا

$$2 \quad \lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{12z^3 - 6z^2 + 16z - 2}{1} = -12i + 6 + 16i - 2$$

1

$$= 4 + 4i$$

نلاحظ ان الدالة

$$f(z) = \frac{12z^3 - 6z^2 + 16z - 2}{z - i}$$

$$z \neq i$$

$$z = i$$

$$4 + 4i$$

15

جواب سوال ۱۵
فصل ۸

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

آنرا

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 6x(2y-1)$$

رابطه

$$1 \quad v = 3x^2(2y-1) + g(y)$$

$$1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 + g'(y)$$

مکان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

همچنین

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6x(2y-1)$$

$$1 \quad u = -6x(y^2-y) + g(x)$$

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -6(y^2-y) + g'(x)$$

رابطه

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

همچنین

$$1 \quad -6y^2+6y+g'(x) = 6x^2+g'(y)$$

سویا، مساوی می‌شود

$$1 \quad g'(y) = -6y^2+6y$$

$$1 \quad g'(x) = 6x^2$$

معادله‌ها را می‌توان به این شکل نوشت

$$1 \quad g(x) = 2x^3 + c_1$$

$$1 \quad g(y) = -2y^3 + 3y^2 + c_2$$

اینها

$$u(x,y) = -6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1$$

$$v(x,y) = 3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2$$

اینها

$$1 \quad f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + c_1] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 + c_2]$$

$$f(0) = 3-2i \Rightarrow c_1 + ic_2 = 3-2i \Rightarrow c_1 = 3, c_2 = -2$$

$$1 \quad f(z) = [-6x(y^2-y) + 2x^3 + 3] + i[3x^2(2y-1) - 2y^3 + 3y^2 - 2]$$

$$f(1+i) = [-6(1)(1-1) + 2+3] + i[3(2-1) - 2+3-2]$$

$$f(1+i) = 5 + 2i$$

جواب السؤال: 15

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$1 = \frac{[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y][\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y]}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}$$

$$1+1 = \frac{\sin x \cos x \cosh^2 y - \sin x \cos x \sinh^2 y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} + i \frac{\sin^2 x \cosh y \sinh y + \cos^2 x \sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}$$

$$2 \tan z = \frac{\sin x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y)}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} + i \frac{\sinh y \cosh y (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}$$

$$1+1 = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \cosh^2 y} + i \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \cosh^2 y}$$

$$1+1 = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\cos^2 x + \sinh^2 y} + i \frac{\frac{1}{2} \sinh 2y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$

$$1 \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$1 \quad \sinh^2 y = \frac{-1 + \cosh 2y}{2}$$

$$1 \quad \tan z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} + i \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$1+1 \quad u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad v = \frac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

5 //

جواب السؤال 15

$$\text{Log } z = \text{Log } r + i\theta$$

$$4 \quad \text{Log}(-1-i)^2 = \text{Log} -2i = \text{Log} | -2i | + i \frac{3\pi}{2} = \text{Log } 2 + i \frac{3\pi}{2}$$

$$4 \quad 2 \text{Log}(-1-i) = 2 \left[\text{Log} | -1-i | + i \frac{3\pi}{4} \right] = \text{Log } 2 + i \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \quad \text{Log}(-1-i)^2 = 2 \text{Log}(-1-i)$$

جواب السؤال 15
المحاولة بالطريقة الأولى

$$1 \quad \frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$1 \quad \frac{w+1}{w-1} = \frac{\frac{4+3i}{5} - 1}{\frac{4+3i}{5} + 1} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{i-1}{i+1}$$

$$1 \quad \frac{w+1}{w-1} = \frac{-1+3i}{9+3i} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{-1+i}{1+i}$$

$$1+1 \quad \frac{w+1}{w-1} = \frac{(-1+3i)(9-3i)}{90} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2}$$

$$1+1 \quad \frac{w+1}{w-1} = \frac{30i}{90} = \frac{z+1}{z-1} = \frac{2i}{2}$$

$$1 \quad \frac{w+1}{w-1} = \frac{1}{3} = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow (w+1)(z-1) = (3z+3)(w-1)$$

$$2 \quad \begin{cases} wz - w + z - 1 = 3zw - 3z + 3w - 3 \\ wz - 3zw - w - 3w = -3z - 3 - z + 1 \\ -2zw - 4w = -4z - 2 \\ w(-2z - 4) = -4z - 2 \end{cases}$$

$$w = \frac{2z+1}{z+2}$$

في الحالة المتكافئة

$$1 \quad z = \frac{-2u+1}{u-2}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{2z+1}{z+2}$$

رسمًا أن

$$|z| = \frac{|-2u+1|}{|u-2|}$$

رسمًا أن $|z| \leq 1$ تكون

$$|-2u+1| \leq |u-2|$$

نقطة على دائرة الوحدة

$$|(-2u+1) - 2(u-2)| \leq |(u-2) + (u-2)|$$

تكون

أما

$$(-2u+1)^2 + 4u^2 \leq (u-2)^2 + u^2$$

$$4u^2 - 4u + 1 + 4u^2 \leq u^2 - 4u + 4 + u^2$$

$$3u^2 + 3u^2 \leq 3 \Rightarrow u^2 + u^2 \leq 1$$

نقطة على دائرة الوحدة التي تقع داخل الدائرة بنصف قطر 1

دائرة الوحدة (التي)

في الحالة المتكافئة $|z| \leq 1$ تكون

$$1 \quad z = \frac{-2u+1}{u-2}$$

$$1 \quad u = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{u} \Rightarrow x = \frac{u}{u^2+u^2} - \frac{u}{u^2+u^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2+u^2} \quad y = -\frac{u}{u^2+u^2}$$

$$1 \quad 0 \leq u \leq \frac{u}{u^2+u^2}$$

$$1 \quad 0 \leq -\frac{u}{u^2+u^2} \leq 2$$

$$1 \quad 0 \geq u \geq -\frac{u}{u^2+u^2}$$

$$1 \quad -u \leq 2(u^2+u^2) \Rightarrow -u \leq 2(u^2+u^2)$$

$$1 \quad u^2 + u^2 + \frac{1}{2}u \geq 0 \Rightarrow u^2 + (u + \frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$$

$$u^2 + (u + \frac{1}{4})^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow u \leq 4$$

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الدورة الصيفية للعام الدراسي 2012-2013

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول : (10+10+10+10+10=50 درجة)

1- أثبت أن $|shy| \leq |sinz| \leq chy$ علما أن $z = x + iy$

2- أثبت أن $|Rez| + |Imz| \leq \sqrt{2} |z|$

3- عبر عن الدالة $Re(e^{\frac{1}{z}})$ بدلالة x, y ثم وضح بالشرح لماذا تكون هذه الدالة توافقية في كل نطاق لا يحتوي نقطة الأصل.

4- استنادا إلى تعريف المشتقة أثبت أن الدالة $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل وغير قابلة للاشتقاق عند باقي نقاط المستوى العقدي.

5- أوجد جميع قيم المقدار $(1+i)^n$.

السؤال الثاني : (10+10+10=30 درجة)

1- اعتمادا على مفهوم الدوال العكسة أوجد حلول المعادلة $\cos z = \sqrt{2}$.

2- أوجد جميع حلول المعادلة $e^z = -3$.

3- عرف الدالة $f(z) = \frac{z^3 + 2z - i}{z - i}$ عند النقطة $z = i$ لتصبح مستمرة عندها.

السؤال الثالث : (10+10+20=40 درجة)

1- أوجد التحويلة الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 0$ فوق النقاط

$\omega_1 = -i, \omega_2 = -1, \omega_3 = \infty$ ثم أوجد وفق التحويلة الناتجة خيال الدائرة $|z| = 1$.

2- أوجد صورة ربع المستوى $0 \leq y \leq 1, x \leq 1$ وفق التحويلة $\omega = \frac{1}{z}$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د. رامز الشيخ فتوح

4/4/4

قرارداد

$$50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$$

جواب سوال اول

$$2 \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

نظم آت

$$2 \quad = \sin^2 x + \cosh^2 y - 1 = \cosh^2 y - \cos^2 x \leq \cosh^2 y$$

(10)

$$1 (1) \quad |\sin z| \leq \cosh y$$

رشته بندی

$$2 \quad \sin^2 x + \sinh^2 y = |\sin z|^2$$

سند وجهه تالی

$$\sinh^2 y \leq |\sin z|^2$$

بسته

$$1 (2) \quad |\sinh y| \leq |\sin z|$$

رشته بندی

$$2 \quad |\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

سند (1) و (2) بسته

نظم آت

(10)

$$2 (1) \quad |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

سند وجهه تالی

$$1 \quad z^2 = x^2 - y^2 + i 2xy$$

رابطه

$$1 \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

بسته

$$2 (2) \quad |2xy| \leq |z|^2$$

سند (1) و (2) بسته

$$2 \quad 2|z|^2 \geq |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 + 2|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|$$

بسته

$$1 \quad 2|z|^2 \geq (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2$$

بسته

$$1 \quad \sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$1 \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

بسته

(10)

$$1 \quad e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left[\cos\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + i \sin\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right]$$

بسته

$$2 \quad \operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}$$

بسته

W. H. S.

$\frac{1}{2} e$ میزان انجمنه در این روز ۶۰ می باشد

$$e^{\frac{1}{2}} \cdot (g \circ f)(z) = g(f(z)) = g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$$

حللے $\frac{1}{2} = u$ تمام اُسٹریلین ریاستیں

وَأَمَّا تِلْكَ الْمَنَافِقُ فَنَنْظِرُ بَيْنَ يَدَيْهِمْ جَهَنَّمَ ۖ وَهُمْ فِيهَا مُنْقَلَبُونَ

تخلیه نداء ارايه اتمه و اتمه تخلیه هی و ان تخلیه در پائین تخلیه

مفتي كل سنة دالة الاسم الطيبين ودالة الاسم 1 مفتي كل سنة دالة الاسم

$$\operatorname{Re}(e^{\bar{z}}) \text{ کی ریل جزو معلوم کریں۔}$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad \Delta z = f(z + \Delta z) - f(z) = |z + \Delta z|^2 - |z|^2$$

$$= (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z \cdot \bar{z} = z \cdot \overline{\Delta z} + \bar{z} \cdot \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

$$1. \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad 2. \frac{\sqrt{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z} + \overline{\Delta z}$$

فليس $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}$ بالمقابل

$$1. \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$$

ایہاں لکھنا ہے کہ

نما ۲۰۰ لیس ۵ ستر غزاله مبارک احمد احمیق منہ بی $\Delta E = \Delta \bar{E}$ ل

$$1. \lim_{Dz \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = z + \bar{z}$$

نکته ۵۲: در این مورد اگر $\Delta_2 = -\Delta_1$ باشد

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{z}{z} = 1$$

1

Handwritten text: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2. $\sqrt{2e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}}$ (10)

4. $(1+i)^n = e^{n \log(1+i)}$

$$4 \quad \therefore e^{-(5+8in\pi)} [\cos \log 4 + i \sin \log 4] \quad Q \checkmark$$

جواب سوال ثانیاً $\{10, 10, 10, 10\}$ ۱۰۳۰۳

۱۰) آینه
 $1 \quad z = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$
 $2 \quad \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

رسم
 $2 \quad \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = -i \log [z + i(1-z)^2]$
 $2+2 \quad \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = -i \log [\sqrt{2} + i(1-z)^2] = -i \log (\sqrt{2} + 1)$

۲
 $z = -i [\log |\sqrt{2} + 1| + i(\pi + 2n\pi)]$

۱
 $z = -i \log (\sqrt{2} + 1) \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

۱۰) معادله
 $1 \quad e^x \cos y + i e^x \sin y = -3$
 با مقایسه اجزای حقیقی و تخیلی

(۱) $e^x \cos y = -3$
 (۲) $e^x \sin y = 0$
 از (۲) $y = n\pi$ یا $y = 0$ یا $y = \pi$
 با استفاده از (۱) داریم

۱
 $e^x (\pm 1) = -3 \Rightarrow e^x = -3 \quad e^x = 3$
 از (۱) $e^x \cos y = -3$ و $e^x \sin y = 0$ داریم $e^x = 3$ و $y = \pi$

۲
 $z = \log 3 + i(\pi + 2n\pi)$
 از (۱) $e^x \cos y = -3$ و $e^x \sin y = 0$ داریم $e^x = 3$ و $y = \pi$

۱۰) معادله
 $1 \quad f(z) = \frac{z^3 + 2z - 1}{z - i}$
 در $z = i$ مقدار

۳+۲
 $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + 2z - 1}{z - i} = \frac{0}{0} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^2 + 2}{1} = \frac{3(i)^2 + 2}{1} = \frac{-3 + 2}{1} = -1$

۳
 $f(z) = \frac{z^3 + 2z - 1}{z - i}$
 در $z = i$ مقدار

حل

$$20 = 10 + 10$$

جواب السؤال

1 $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$ (10)

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

1 $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

2 $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$

1 $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$

1 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2}$

4 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow |w| = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| = 1$

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

2 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2}$ (10)

2 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2}$

2 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2}$

2 $w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2} \Rightarrow w = \frac{z}{2}$

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

$(w - \frac{1}{2})^2 + w^2 \leq \frac{1}{4}$

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

نلاحظ ان الدالة على z و w دالة مفرقة

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الثاني للعام الدراسي 2012-2013

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول: (50 درجة)

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

1- أوجد الشكل القطبي لمعادلة الدائرة

$$\left(\frac{1 + \sin x - i \cos x}{1 + \sin x + i \cos x} \right)^n = \cos n \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin n \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

2- أثبت صحة العلاقة

3- أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للدالة $f(z) = e^{z^2}$ ثم أثبت أن هذه الدالة قابلة

للاشتقاق ثم أثبت أن $f'(z) = 2ze^{z^2}$

4- بين بالتفصيل لماذا تكون الدالة $\operatorname{Re}\left(\frac{\cos z}{e^z}\right)$ دالة توافقية في المستوى العقدي

$$\left[\frac{e + \sqrt{3}ei}{2} \right]^{3\pi i}$$

5- أوجد القيمة الأساسية للمقدار

السؤال الثاني: (25+8+8 درجة)

1- باستخدام مفهوم الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $chz = -2$

2- أثبت أن الدالة $f(z) = r^3 \cos 3\theta - ir^3 \sin 3\theta$ غير تحليلية

3- أثبت أن $\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$

السؤال الثالث: (15+10+25 درجة)

1- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 2i$ و $z_2 = -2i$ و $z_3 = \infty$

فوق النقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = \infty$ و $w_3 = 1$ ثم أوجد وفق التحويلة الناتجة

خيال الدائرة $|z|=1$

2- أوجد خيال المستقيم $y = x-1$ وفق التحويلة $w = z^2$

مدرس المقرر: د. رامي الشيوخ نتوج

جواب السؤال كآلة... $50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$ محسوبة

1 $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4 \iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ أريد 10

1 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

2 $|z|^2 = \bar{z} \cdot z = x^2 + y^2 \iff -2 + x + iy = z$ بفرض أن

2 + 2 $2x = z + \bar{z} \quad 2y = \frac{z - \bar{z}}{i} \Rightarrow 2y = i(z - \bar{z})$ و

1 $z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} - i(z + i\bar{z}) - 2 = 0$ نوزن بقدر

1 $z \cdot \bar{z} - (1+i)z - (1-i)\bar{z} - 2 = 0$

هذه هي المعادلة لدارك (أو دائرة المسك) في المستوى المركب
 $x-1 = 2 \cos \theta \quad x-x_0 = r \cos \theta$
 $y+1 = 2 \sin \theta \quad y-y_0 = r \sin \theta$

$\frac{1 + \sin x - i \cos x}{1 + \sin x + i \cos x} = \frac{1 + \sin x - i \cos x}{1 + \sin x + i \cos x} \cdot \frac{1 + \sin x - i \cos x}{1 + \sin x - i \cos x} = 10$ نأخذ

$= \frac{(1 + \sin x)^2 - 2i \cos x (1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
 $2 \cos 2x$

$= \frac{1 + 2 \sin x - \cos 2x - 2i \cos x (1 + \sin x)}{2 + 2 \sin x}$

$= \frac{x + 2 \sin x - (x - 2 \sin^2 x) - 2i \cos x (1 + \sin x)}{2 (1 + \sin x)}$

$= \frac{2 \sin x (1 + \sin x) - 2i \cos x (1 + \sin x)}{2 (1 + \sin x)} = \sin x - i \cos x$

$= \cos(x - \frac{\pi}{2}) + i \sin(x - \frac{\pi}{2})$

نکته: شرط - دایره $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ - دایره یایانه

$$f(z) = e^{z^2} = e^{x^2 - y^2 + 2ixy} = e^{x^2 - y^2} [\cos(2xy) + i \sin(2xy)]$$

$$2 \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) = u(x, y) &= e^{x^2 - y^2} \cos 2xy \\ \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) &= e^{x^2 - y^2} \sin 2xy \end{aligned} \right.$$

همانگونه که $f(z) = e^{z^2}$ تابعی متشابه با آنکه تدریس است و اجزای بدلیته u, v مورد بررسی در حقیقت شرط کوشی - ریمن

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2 - y^2} \cos 2xy - 2y e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + 2x e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$$

$$1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + 2y e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$$

$$1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y e^{x^2 - y^2} \cos 2xy - 2x e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

نموده اند که استقالات کوشی - ریمن مورد بررسی در حقیقت شرط کوشی - ریمن

$$1+1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$2 \quad \left\{ \begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2x e^{x^2 - y^2} \cos 2xy - 2y e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + i [2x e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + 2y e^{x^2 - y^2} \cos 2xy] \end{aligned} \right.$$

شماره کل $x + iy$ در هر نقطه

$$f'(z) = 2ze^{z^2}$$



حل

1. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

4. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

5. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

6. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

7. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

8. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

9. $z = e^{i\theta}$ \Rightarrow $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ \Rightarrow $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ \Rightarrow $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

حل

ca

داده سوال 1: $25 = 9 + 8 + 8$ راجع

1 $z = \operatorname{arccch}(-2)$ $c = \operatorname{ch} z = -2$ $\operatorname{arccch} w = \operatorname{Lag}(w + (w^2 - 1)^{1/2})$ (8)
 1 $\operatorname{arccch} w = \operatorname{Lag}(w + (w^2 - 1)^{1/2})$
 1 $\operatorname{arccch} w = \operatorname{Lag}(w + (w^2 - 1)^{1/2})$

2 $z = \operatorname{arccch}(-2) = \operatorname{Lag}(-2 + (4 - 1)^{1/2})$
 1 $1 + 1 \quad \operatorname{Lag}(-2 + \sqrt{3}) = \operatorname{Lag}(2 + \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})^{1/2})$
 1 $\operatorname{Lag}(2 + \sqrt{3}) + i(2 + \sqrt{3})^{1/2}$
 1 $\operatorname{Lag}(2 + \sqrt{3}) + i(2 + \sqrt{3})^{1/2}$

$u(r, \theta) = r^3 \cos 3\theta$ $v(r, \theta) = r^3 \sin 3\theta$ (8)
 1 $1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\theta$ $\frac{\partial v}{\partial \theta} = -3r^3 \sin 3\theta$
 1 $1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -3r^3 \sin 3\theta$ $\frac{\partial v}{\partial r} = -3r^2 \sin 3\theta$

این دو تابع در هر دو جهت در نقطه $(1, 0)$ برابر است

1 $1 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial r} \neq \frac{\partial v}{\partial \theta}$ $\frac{\partial v}{\partial r} \neq -\frac{\partial u}{\partial \theta}$
 2 $\frac{\partial u}{\partial r} \neq \frac{\partial v}{\partial \theta}$ $\frac{\partial v}{\partial r} \neq -\frac{\partial u}{\partial \theta}$

4 $\operatorname{Lag}(-1 + i)^2 = \operatorname{Lag}(-2i) = \operatorname{Lag}(2 + i(-\frac{\pi}{2}))$ (9)
 $= \operatorname{Lag} 2 - i \frac{\pi}{2}$

3 $\operatorname{Lag}(-1 + i) = \operatorname{Lag} \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{Lag} 2 + i \frac{3\pi}{4}$
 1 $2 \operatorname{Lag}(-1 + i) = \operatorname{Lag} 2 + i \frac{3\pi}{2}$
 2 $\operatorname{Lag}(-1 + i)^2 \neq 2 \operatorname{Lag}(-1 + i)$

6N

جواب السؤال الثالث: $25 = 10 + 15$ خمسة عشر

$$1 \quad \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

أيضا: المبركة في السؤال (15)

رأيت بأنه $\omega_2 = \infty$ و $z_3 = \infty$ و $\omega_1 = \frac{1}{\omega_2}$ و $z_1 = \frac{1}{z_3}$ كل ω و z في المستوى

$$1 \quad \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_2} - \omega_1}{\frac{1}{\omega_2} - \omega_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - \frac{1}{z_3}}{z_2 - z_1}$$

$$2 \quad \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{1 - \omega_2 \omega_3}{1 - \omega_1 \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_3 z_2 - 1}{z_2 - z_1}$$

نلاحظ بأن المبركة هي أن $\omega_2 = \infty$ و $z_3 = \infty$ و $\omega_1 = \frac{1}{\omega_2}$ و $z_1 = \frac{1}{z_3}$ كل ω و z في المستوى

$$1 \quad \frac{\omega - 0}{\omega - 1} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{z - 2i}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{-2i - 2i}$$

$$1 \quad \frac{\omega - 0}{\omega - 1} = \frac{z - 2i}{-4i} \Rightarrow -4i\omega = z - 2i\omega - z + 2i$$

$$2 \quad \left. \begin{aligned} -\omega z - 2i\omega &= -z + 2i \Rightarrow \omega(-z - 2i) = -z + 2i \\ \omega &= \frac{-z + 2i}{-z - 2i} \Rightarrow \omega = \frac{z - 2i}{z + 2i} \end{aligned} \right\}$$

المبركة في السؤال
بأي

$$1 \quad z = \frac{-2i\omega - 2i}{\omega - 1} \Leftrightarrow \omega = \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

$$1+1 \quad |z| = \left| \frac{-2i\omega - 2i}{\omega - 1} \right| \Rightarrow 1 = \frac{|-2i|}{|\omega - 1|} \cdot \frac{|\omega + 1|}{1}$$

$$1+1 \quad |\omega - 1| = 2|\omega + 1| \Rightarrow (u-1)^2 + v^2 = 4(u+1)^2 + 4v^2$$

$$1 \quad u^2 - 2u + 1 + v^2 = 4u^2 + 8u + 4 + 4v^2$$

$$1 \quad 3u^2 + 3v^2 + 10u + 3 = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 + \frac{10}{3}u + 1 = 0$$

في المستوى المركب هو دائرة في المستوى المركب

1. $z = x + iy$ $w = u + iv$ $z^2 = w^2$ $z = w$ $z \neq w$

1. $u + iv = x + iy$ $u = x$ $v = y$ $u + iv = x^2 - y^2 + i(2xy)$

2. $u + iv = x^2 - y^2 + i(2xy)$ $u = x^2 - y^2$ $v = 2xy$ $u + iv = (x + iy)^2$

1. $u = x^2 - (x + i)^2$ $v = 2x(x + i)$

1. $u = x^2 - x^2 + 2ix - 1$ $v = 2x(x + i)$

1. $u = 2x - 1$

1. $u + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$

نوعی لا تغییر

1. $v = 2 \left(\frac{u+1}{2} \right) \left(\frac{u+1}{2} + i \right)$
 $v = (u+1) \left(\frac{u+1}{2} + i \right)$

1. $v = \frac{1}{2} (u^2 - 1) \Rightarrow u + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$

در این صورت $u = 1$ $v = 0$ $z = 1$

2. $z = 0$ $w = 0$ $z = w$ $z \neq w$

الفتره ای جابجایی

در این صورت

در این صورت

در این صورت

بسیار مهم است

در این صورت

اسم الطالب :

تحليل عقدي /1/

جامعة البعث

الفصل الأول للعلم الدراسي ١٠١٢-١٠١٣

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول: (١٠ درجات لكل سؤال)

١- "أوجد العدد العقدي z بحيث تكون الأعداد i, z, iz رؤوس مثلث متساوي الأضلاع."

٢- "اكتب العدد العقدي $\frac{\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i}}{\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}}$ على الصورة $a+ib$."

٣- "اعتماداً على التوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $\cos z = 2i$."

٤- "أوجد القيمة الأساسية للمقدار i^{2i} ."

٥- "أوجد الحل الوحيد للمعادلة $\text{Log} \frac{\sqrt{3}z^2+1}{2} = i\frac{\pi}{3}$."

السؤال الثاني: (٢٥=٧+٨+١٠ درجة)

١- "أثبت أن الدالة $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ هي دالة توافقية ثم أوجد المرافق التوافقي لها ثم عبر عن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بدلالة z ."

٢- "اعتماداً على تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(z) = \frac{1}{z^2}$."

٣- "أثبت أن الدالة $f(z) = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta$ هي دالة تحليلية في أي نطاق لا يحتوي $z=0$."

السؤال الثالث: (٢٥=١٠+١٥ درجة)

١- "أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تتقل النقاط $z_1 = -i$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = i$ فوق النقاط $w_1 = -1$ و $w_2 = i$ و $w_3 = 1$ ثم أوجد خيال المستقيم $y=1$ وفق التحويلة الناتجة."

٢- "أوجد خيال المستقيم $y+x=-1$ وفق التحويلة $w=z^2$ مع الرسم."

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. راسم الشيخ فتوح

جواب: لیست اولی: $10+10+10+10+10=50$ اختصار

درست، اما تکرار نموده، در هر سطح، در هر سطح، در هر سطح، در هر سطح، در هر سطح

(10)

$$2 \begin{cases} |iz_2 - c| = |iz_2 - z| = |z - c| \\ |iz_2 - c| = |iz_2 - z| \Rightarrow |i(x+iy) - c| = |i(x+iy) - (x+iy)| \\ |iz_2 - c| = |z - c| \Rightarrow |i(x+iy) - c| = |x+iy - c| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |-y+c(x-1)| = |(-y-x)+c(x-y)| \Rightarrow y^2+(x-1)^2 = (-y-x)^2+(x-y)^2 \\ |-y+c(x-1)| = |x+c(y-1)| \Rightarrow y^2+(x-1)^2 = x^2+(y-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+x^2-2x+1 = y^2+2xy+x^2+x^2-2xy+y^2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-1=0 \\ y^2+x^2-2x+1 = x^2+y^2-2y+1 \Rightarrow x=y \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x^2+2x-1=0 \quad \Delta=4+8=12 \\ x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$1 \begin{cases} z = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2 \frac{\sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i}}{\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}} = \frac{(\sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i})^2}{(3+4i) - (3-4i)} \quad (10)$$

$$2 = \frac{3+4i - 2\sqrt{(3+4i)(3-4i)} + 3-4i}{8i} = \frac{6-2\sqrt{25}}{8i}$$

$$2 = \frac{6-10}{8i} = -\frac{4}{8i} = \frac{1}{2}i$$

المنهج الأول

27/04

1 $z = \arccos 2i \iff \cos z = 2i$ مثال 10
 1 $\arccos z = -i \operatorname{Lay} (z + i(1-z^2)^{1/2})$ رسم انت

1 $z = \arccos(2i) = -i \operatorname{Lay} (2i + i(1-(2i)^2)^{1/2})$ ذات

1 + 1 $= -i \operatorname{Lay} (2i + i(1+4)^{1/2}) = -i \operatorname{Lay} (2i + i\sqrt{5})$

1 + 1 $= -i [\operatorname{Lay} |(2+\sqrt{5})i| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)]$

3 $= \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \operatorname{Lay} (\sqrt{5} + 2)$

1 $z^c = e^{c \operatorname{Lay} z}$ المعادلة 10
 1 $z^c = e^{c \operatorname{Lay} z}$ تكتب النتيجة في صورة أسية

$i^{2i} = e^{2i \operatorname{Lay} i} = e^{2i [\operatorname{Lay} |i| + i(\frac{\pi}{2})]} = e^{2i [\operatorname{Lay} 1 + i(\frac{\pi}{2})]}$

$= e^{2i [0 + i(\frac{\pi}{2})]} = e^{-\pi}$

$\operatorname{Lay} (\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2}) = i\frac{\pi}{3} \Rightarrow e^{\operatorname{Lay} (\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ مثال 10

2 $\frac{\sqrt{3}z^2+1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 $z^2 = i \Rightarrow z = (i)^{1/2}$

2 $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow (i)^{1/2} = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right)$

اذا $k=0$ سنحصل على k يكون

1 $z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

1 $z_1 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$

1 $z_2 = \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}$ رسم دائرة الوحدة
 1 $z_3 = \cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}$ رسم دائرة الوحدة

النتيجة النهائية

جواب السؤال الثاني: $1 + 8 + 7 = 15$ سنة عزلة
أدلت: تكون الدالة قياسية إذا كانت المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى
(15) الثانية موجودة مستمرة في كل نقطة من مجال الدالة لا بد من
التأني

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

هذه الفتاوى مخرجة من نسخة بخط يده

$$1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2} = 6x - 6x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y}$$

لدينا الراتب الثاني ستمائة

$$1 \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow u = x^2 y - y^3 + f(x)$$

$$1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + y'(x)$$

$$z'_{y1} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \sim 6,$$

$$1. \quad \sigma_{xy} + y'(x) = \sigma_{xy} - 1$$

$$\perp \Rightarrow y'(x) = -1 \Rightarrow y(x) = -x + C \Rightarrow v = 3x^2 y - y^3 - x + C$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + c + c(3x^2y - y^3 - x + c)$$

$$f(z) = z^3 + i(-z) + iC = z^3 - iz + iC$$

نایاب : نسیم اے

$$2 \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(z+\Delta z)^2} - \frac{1}{z^2}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 - (z+\Delta z)^2}{z^2 \cdot (z+\Delta z)^2 \cdot \Delta z}$$

$$b) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 - z^2 - 2z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2}{z^2(z + \Delta z)^2 \cdot \Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-2z - \Delta z}{z^2(z + \Delta z)^2}$$

$$141 = -\frac{22}{24} = -\frac{2}{21}$$

22

ناتجة من تأثر الدالة $f(z)$ بتطبيق مولد فاجر لا الذي لا يحوي z
 (7) في أن تأثر هذه الدالة قابلة لمؤقتاتة شكل نقطة من نقاط
 هذه النقاط من تأثر قابلية لمؤقتاتة في أن تأثر لمؤقتات
 الجزئية من أربعة الأولى z_1, z_2, z_3, z_4 من هذه النقاط
 راجعة من z_1 راجعة من z_2 راجعة من z_3 راجعة من z_4

$$u = u(r, \theta) \quad v = v(r, \theta) \quad w = w(r, \theta)$$

$$1 + \frac{\partial u}{\partial r} = (1 - \frac{1}{r}) \cos \theta \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = (r - \frac{1}{r}) \sin \theta$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \theta} = -(r + \frac{1}{r}) \sin \theta \quad \frac{\partial v}{\partial r} = (1 + \frac{1}{r}) \sin \theta$$

هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط
 الماد من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط

$$1 \quad (1 - \frac{1}{r}) \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (r - \frac{1}{r}) \sin \theta = (1 - \frac{1}{r}) \sin \theta$$

$$1 \quad (1 + \frac{1}{r}) \sin \theta = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} (r + \frac{1}{r}) \sin \theta = -(1 + \frac{1}{r}) \sin \theta$$

في هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط
 الدالة من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط

هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط
 الدالة من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط
 الدالة من هذه النقاط من هذه النقاط من هذه النقاط

$$3 \quad \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

$$\frac{w + 1}{w - 1} \cdot \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 + 1} \Rightarrow \frac{w + 1}{w - 1} \cdot \frac{-1 + 1}{1 + 1} = - \frac{z + 1}{z - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{w + 1}{w - 1} = - \frac{z + 1}{z - 1} \Rightarrow (w + 1)(z - 1) = -(w - 1)(z + 1)$$

2 //

$$6 \begin{cases} c'zw + w + c'z + 1 = -wz - c'w + z + c' \\ c'zw + wz + w + c'w = -c'z + z - 1 + c' \\ wz(1+c') + w(1+c') = z(1-c') - (1+c') \\ w(1+c')(z+1) = (1-c')(z-1) \Rightarrow w = \frac{1-c'}{1+c'} \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow w = \frac{-c'z+c'}{z+1} \end{cases}$$

ر من التربة المطلوبة لـ بجار هيار السليم $z=1$ رفق التربة السليمة
تأني التربة السليمة بالمثل

$$1 \quad z = \frac{-w+c'}{w+c'} \quad \text{نرمز إلى } z = x+iy \text{ و } w = u+iv \text{ بارت}$$

$$1 \quad x+iy = \frac{-u-c'v+c'}{u+iv+c'} = \frac{-u+c'(1-v)}{u+c'(1+v)}$$

$$1 \quad x+iy = \frac{[-u+c'(1-v)] \pm [u-c'(1+v)]}{u^2+(1+u)^2} = \frac{-u^2+1-u^2}{u^2+(1+u)^2} + i \frac{2u}{u^2+(1+u)^2}$$

$$1 \quad y = \frac{2u}{u^2+(1+u)^2} \Rightarrow \text{إذا } 1 = \frac{2u}{u^2+(1+u)^2} \Rightarrow$$

$$u^2+(1+u)^2=2u \Rightarrow u^2-2u+1+(u+1)^2=1$$

$$2 \begin{cases} (u-1)^2+(u+1)^2=1 \\ \text{أي أن هيار السليم } z=1 \text{ هي الدائرة التي مركزها } (1, -1) \text{ نصف قطرها } R=1 \end{cases}$$

$$10 \quad \begin{cases} \text{نرمز إلى } z = x+iy \text{ و } w = u+iv \\ \text{أي أن } u = 2x \text{ و } v = -x-1 \end{cases}$$

$$1 \quad u+iv = x^2 - y^2 + 2ixy \quad \text{و } u = x^2 - y^2 \quad \text{و } v = -x-1$$

$$4 \quad \begin{cases} u = x^2 - (x+1)^2 & v = -2x(x+1) \\ u = -2x-1 \Rightarrow x = -\frac{u+1}{2} \\ u = +2 \frac{u+1}{2} - \left(-\frac{u+1}{2} + 1\right) = (1+u)\left(\frac{1-u}{2}\right) \end{cases}$$

الركبة د-ع
2

في سارية تلج معك في درجته $(\frac{1}{2}, 0)$ نقره نواله

20

X

اسم الطالب :

تحليل عقدي / ١

جامعة البعث

العلامة: (١٠٠)

١. لفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١١-٢٠١٢

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول : (٢٠ درجة)

إذا كان $z_1 = 2$ و $z_2 = 3 - i$ و $z_3 = x + iy$ فأوجد العددين الحقيقيين $x, y \in R$ لتكون الأعداد العقدية السابقة رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ثم أثبت أن z_3 يكتب على الصورة $z_3 = 2 + \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$ أو $z_3 = 2 + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

السؤال الثاني : (٢٠ درجة)

أثبت أن الدالة $f(z) = r^2 \cos 2\theta + \frac{1}{r} \cos \theta + i(r^2 \sin 2\theta - \frac{1}{r} \sin \theta)$ دالة تحليلية في أية منطقة من المستوى العقدي لا تحتوي النقطة $z = 0$

السؤال الثالث : (١٣ درجة)

أثبت أن الدالة $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ هي دالة توافقية ثم أوجد المرافق التوافقي لها. (١٠ درجة)

السؤال الرابع : (١٠ درجات)

اعلمنا على الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $\sin z = 3$

السؤال الخامس : (١٥ درجة)

إذا كان $\log z = \text{Log}|z| + i\phi$ حيث $0 \leq |z| \leq \frac{8\pi}{3}$ فأوجد $\log z^2$ و $2\log z$ ، ثم قارن بينهما إذا علمت أن $z = i$

السؤال السادس : (١٥ + ١٥ = ٣٠ درجة)

١- أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = i$ ، $z_2 = \infty$ ، $z_3 = -i$ فوق النقاط $w_1 = 0$ ، $w_2 = 1$ ، $w_3 = \infty$ على الترتيب ، ثم أوجد خيال $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة

٢- أوجد خيال المثلث الناتج عن تقاطع المستقيمات $y = x$ ، $y = -x$ ، $y = -1$ وفق التحويلة $w = z^2$

27

جواب السؤال ان ذلك 25 عشر درهم
 يارب الله يساري الله يبارك في داره
 ما يري

$$|z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \quad \wedge \quad |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$|x+iy-2| = |3-i-2| \quad \wedge \quad |x+iy-3+i| = |3-i-2|$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 2 \quad \wedge \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 4x + y^2 = -2 \quad \wedge \quad \textcircled{2} \quad x^2 - 6x + y^2 + 2y = -8$$

بطرح $\textcircled{2}$ من $\textcircled{1}$ نحصل

$$2x - 2y = 6 \Rightarrow y = x - 3 \quad \textcircled{3}$$

نبدل $\textcircled{3}$ في $\textcircled{1}$ نحصل

$$x^2 - 4x + (x-3)^2 = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + x^2 - 6x + 9 = -2$$

$$2x^2 - 10x + 11 = 0$$

$$\Delta = 100 - 88 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{10 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

أي أن

$$z_3 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$3 \left\{ \begin{aligned} z_3 &= 2 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 2 + \sqrt{2} \left[\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right] \\ &= 2 + \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{12}} \end{aligned} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{aligned} z_3 &= \frac{5 - \sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ &= 2 + \sqrt{2} \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right] = 2 + \sqrt{2} e^{-i \frac{5\pi}{12}} \end{aligned} \right.$$

$$1 \int \frac{\delta y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+y^2) - 4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6yx^2 + 2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

ربطای مربوطات اینست، برای اماراتینیه معلوم، سرودنی اینی غیرمبارک، هر

$$1 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{6yx^2 - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} - \frac{6yx^2 + 2y^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{0}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

$$1 \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta y} \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

لذا جاد المراتب الترتیبی نسیم آت

$$1 u = -2x \int \frac{y dy}{(x^2+y^2)^2} + \gamma(x)$$

$$dy = x dt \Leftarrow y = x t$$

تفرض آت

$$1 u = -x \int \frac{2x^2 t dt}{(x^2+x^2 t^2)^2} + \gamma(x) = +\frac{1}{x} \int \frac{2t dt}{(1+t^2)^2} + \gamma(x)$$

$$\Leftarrow 2t dt = du \Leftarrow t^2 = u$$

تفرض آت

$$1 u = +\frac{1}{x} \int \frac{du}{(1+u)^2} + \gamma(x) \Rightarrow u = +\frac{1}{x} \frac{1}{1+u} + \gamma(x)$$

$$1 u = +\frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \gamma(x) = +\frac{x}{x^2-y^2} + \gamma(x) \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2-y^2)^2} + \gamma'(x)$$

جواب السؤال الرابع: 10 نقطة

1 $z = \arcsin 3$
 $\arcsin z = -i \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$ رأى أنه نعمان
 $\Leftarrow \sin z = 3$

1+1 $\arcsin 3 = -i \operatorname{Log}(i3 + \sqrt{1-9}) = -i \operatorname{Log}(i3 + (-8)^{1/2})$ لأنه
 $= -i \operatorname{Log}(i3 \pm i2\sqrt{2}) = -i \operatorname{Log}(3 \pm 2\sqrt{2})i$

1 $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i(\theta + 2n\pi)$ رأى أنه نعمان
 $n = 0, 1, 2, \dots$
 قيمته

1+2 $\arcsin 3 = -i \operatorname{Log}(3 \pm 2\sqrt{2})i = -i \left[\operatorname{Log}|(3 \pm 2\sqrt{2})i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right]$
 $= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - i \operatorname{Log}(3 \pm 2\sqrt{2})$

جواب السؤال الخامس: 15 نقطة

6 $\operatorname{Log} z^2 = \operatorname{Log} i^2 = \operatorname{Log} (-1) = \operatorname{Log}| -1| + i\pi = i\pi$

6 $2 \operatorname{Log} i = 2 \left[\operatorname{Log}|i| + i\frac{5\pi}{2} \right] = 2 \operatorname{Log} 1 + i5\pi = i5\pi$
رأى أنه نعمان

3 $\operatorname{Log} z^2 \neq 2 \operatorname{Log} z$

جواب السؤال السادس: 30 = 15 + 15

1 $\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$ (15)
 المعادلة التي لها النسبة كمنه

1 $\frac{1}{\omega_3}$ نضع $z_2 = \infty$ $\frac{1}{z_2}$ $\frac{1}{\omega_3}$ $\omega_3 = \infty$ $\frac{1}{\omega_3}$ $\frac{1}{z_1}$ $\frac{1}{z_2}$ $\frac{1}{z_3}$

1 $\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \frac{1}{\omega_3}} \cdot \frac{\omega_2 - \frac{1}{\omega_3}}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{\frac{1}{z_1} - z_3}{\frac{1}{z_1} - z_1} \Rightarrow$

1 $\frac{\omega - \omega_1}{\omega \omega_3 - 1} \cdot \frac{\omega_2 \omega_3 - 1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{1 - z_1 z_3}{1 - z_1 z_3}$

1+1 $\frac{\omega - 0}{0 - 1} \cdot \frac{0 - 1}{1 - 0} = \frac{z - 0}{z - 0} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0} \Rightarrow \omega = \frac{z - 0}{z - 0}$

نبا

$$z = \frac{-c'w - c'}{w - 1}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{z - c'}{z + c'}$$

جاء

$$k+1 \Rightarrow z = \frac{c'w + c'}{1 - w} \Rightarrow x + iy = \frac{-v + i(u + c')}{1 - u - c'v} = \frac{-v + i(u + 1)}{(1 - u) - c'v}$$

$$x + iy = \frac{[-v + i(u + 1)][(1 - u) + i c'v]}{(1 - u)^2 + v^2}$$

رشته نایخ

$$+1 \left\{ \begin{aligned} &= \frac{-v(1 - u) - v(u + 1)}{(1 - u)^2 + v^2} + i \frac{-v^2 + (1 + u)(1 - u)}{(1 - u)^2 + v^2} \\ &= \frac{-2v}{(1 - u)^2 + v^2} + i \frac{-v^2 - u^2 + 1}{(1 - u)^2 + v^2} \end{aligned} \right.$$

رشته نایخ کارداری در ریشه عدد بیگانه

$$+1 \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \\ x &= \frac{-2v}{(1 - u)^2 + v^2} \end{aligned} \right.$$

رشته نایخ چارال استیم $y = 0$ در مجموعه نقاط $u^2 + v^2 = 1$ $R = 1$
 $1 - u^2 - v^2 = 0$ در مجموعه نقاط $(0, 0)$ $R = 1$

$$z = x + iy \Leftrightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i 2xy$$

$$1) \quad u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy$$

$$u = x^2 - 1 \quad v = -2x$$

$$3) \left\{ \begin{aligned} &u = \frac{v^2}{4} - 1 \Rightarrow u + 1 = \frac{1}{4}v^2 \\ &\text{در مداره قطع منحنی دورنه (0, -1) قطر محورال} \end{aligned} \right.$$

چال استیم $x = 0$ در مجموعه نقاط $u = x^2 - (-x)^2 = 0$
 در مجموعه نقاط این سطح در این ابرای است

هياكليم $y = y$ بحرہ انسا

$$3 \quad \begin{cases} u: x^2 - x^2 = 0 & , & v: 2x^2 \end{cases}$$

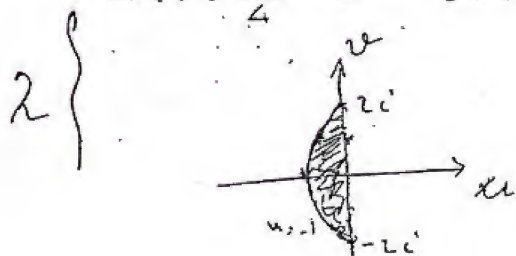
هي بحمد الله تعالى فتح على البحر المسجود له سنة الف مائة

$x = 1$ $y = -x$ $z = -1$
 نقطة تقاطع المستويين $w = (1-i)^2 = -2i$ $z = -1$

3) $(-1, -1)$ في دائرة الوحدة $x = -1$ $y = -1$ $z = 1$
 $w = (-1 - i)^2 = -2i$ في دائرة الوحدة

(2,4) \Rightarrow $y = y$ $y = -y$
 $w = 0$ \Rightarrow $y = 0$ $y = 0$


اَوْنَةُ مَيْدَانِ الثَّمَرِ هِيَ الْبَحْرُ الْحَمْرِي سَمِيحٌ رَاقٍ لَهَا
رَاسُ الثَّقِينِ $u = \frac{v^1}{4}$



ان شاء الله

مدرسة البركة

د. ابراهيم بن يوسف



اسم الطالب : سارة مزحة

تحليل عقدي ١١

جامعة البعث

نورة مرسود ٢٠٠٩-٢٠١٠

كلية العلوم - قسم الرياضيات

السؤال الأول : (١٠ درجات)

أوجد المعادلة الديكارونية للحامل الهندسي لمجموعة النقاط التي تناظر الأعداد العقدية

$$z = z_0 + ae^u + be^{-u} \text{ حيث } a, b, t \in R^+, \text{ و } z_0 = x_0 + y_0 i$$

السؤال الثاني : (١٥ درجة)

لتكن $z_1 = 1, z_2 = 2 + i, z_3 = x + y i$ والمطلوب إيجاد قيم x, y لتكون هذه الأعداد

رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، ثم أثبت أن z_3 يكتب بالشكل

$$z_3 = 1 + \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad z_3 = 1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

السؤال الثالث : (١٥ درجة)

$$\log(z^2 - 1) = i \frac{\pi}{2}$$

أوجد الحل الوحيد للمعادلة

السؤال الرابع : (١٢ + ١٢ = ٢٤ درجة)

١- إذا كانت C هي القطعة المستقيمة الواصلة من $z = 1$ إلى $z = 1 + i$ فثبت أن

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{i}{4} \log 5$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z}{(z+2)(z^2+2z)} dz$$

٢- أوجد قيمة التكامل الآتي

السؤال الخامس : (١٥ درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = 1, z_2 = -i, z_3 = -1$ فوق النقاط

$w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$ على الترتيب، ومن ثم أوجد من خلال التحويلة الناتجة خيول

الدائرة $|z| = 1$.

مدرس المقرر : د. رامي الشيوخ فتوح

انتهت الأسئلة

جواب السؤال الأول، [10] نقطة

نرمنا أنه $z = x + iy$ حيث

$$1 + i \quad z - z_0 = a e^{it} + b e^{-it} \Rightarrow (x - x_0) + i(y - y_0) = a e^{it} + b e^{-it}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (x - x_0) + i(y - y_0) &= a \cos t + i a \sin t + b \cos t - b i \sin t \\ &= (a + b) \cos t + i(a - b) \sin t \end{aligned}$$

رأينا أنه لدينا x و y بدلالة t

$$1 + i \quad x - x_0 = (a + b) \cos t \quad \wedge \quad y - y_0 = (a - b) \sin t$$

$$1 + i \quad \frac{x - x_0}{(a + b)} = \cos t \quad \wedge \quad \frac{y - y_0}{(a - b)} = \sin t$$

بالتربيع وجمع نجد أن

$$\frac{(x - x_0)^2}{(a + b)^2} + \frac{(y - y_0)^2}{(a - b)^2} = 1$$

1 (x_0, y_0) مركز

جواب السؤال الثاني، [15] نقطة

جاءت اثنتان من الرياضيات حيث هي أنه نتجت

$$1 \quad |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$1 \quad |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| \Rightarrow |(x-1) + i(y-1)| = |1 + i|$$

$$1 \quad |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \quad |(x-1) + i(y-1)| = |1 + i|$$



$$1 \quad \text{Arg } z_g = \arctan \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\text{Arg } z_g^* = \arctan \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(30-45)}{\cos(30-45)} = \frac{\sin 30 \cos 45 - \cos 30 \sin 45}{\cos 30 \cos 45 + \sin 30 \sin 45}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{12} = \arctan \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Arg } z_g = -\frac{\pi}{12}$$

$$z = 1 + \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{12}}$$

من جهة أخرى

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan \frac{5\pi}{12} = -\frac{\sin(30+45)}{\cos(30+45)}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{7\pi}{12} = \arctan \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$\text{Arg } z_g^* = \frac{7\pi}{12}$$

$$z = 1 + \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}}$$

جواب السؤال الثاني، [15] خمسة عشر

$$z^2 - 1 = e^{i \frac{\pi}{2}} \quad \text{من جهة أخرى}$$

$$z^2 - 1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = i \Rightarrow z^2 = 1 + i \Rightarrow$$

$$z = (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

من جهة أخرى

✓

دستگاه معادلات

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \end{cases}$$

با طرح معادله اول از معادله دوم

$$2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$$

نرخه اول را در معادله دوم قرار می دهیم

$$x^2 - 2x + 1 + 4 - 4x + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

محاسبه دلتا

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = 2 - \frac{3 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2 = 2 - \frac{3 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

نقطه

$$z = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$z = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

و

نمودار مختصات این دو نقطه را در صفحه مختصات می کشیم

$$z = 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 1 + z_0 = 1 + \rho e^{i \theta_0}$$

$$z = 1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\rho}{\theta} = 1 + \rho e^{i \theta}$$

$$|z_0| = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\rho_0 = \rho_1 = \sqrt{2}$$

نقطه

و

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

رمانه

$$(1+i)^2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{2} \right) \quad k=0, 1$$

مخاطب = 2 کاتجربین

$$2^{1/2} = (1+i)^2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$2^{1/4} = (1+i)^2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2} \right)$$

رشته بیل 1: 2 کاتجربین

$$2^{-1/4} = (1+i)^2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2} \right)$$

رشته بیل 2: 2 کاتجربین

$$25 = 13 + 12$$

$$12 = 13 - 1$$

جمله اوله استهلاک و جمله دومه استهلاک

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z \Big|_{-1}^{1+i}$$

$$\arctan(1+i) = \frac{i}{2} \log \frac{i+(1+i)}{i-(1+i)} = \frac{i}{2} \log -(1+2i)$$

$$= \frac{i}{2} \left[\log |1+2i| + i \operatorname{Arg}(1+2i) \right]$$

$$|1+2i| = \sqrt{5}$$

$$\operatorname{Arg}(1+2i) = \arctan 2$$

رمانه

مخاطب

$$\arctan(1+i) = \frac{i}{2} \left[\log \sqrt{5} + i \arctan 2 \right] = -\frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{i}{2} \log \sqrt{5}$$

$$\arctan(1) = \frac{i}{2} \log \frac{i+1}{i-1} = \frac{i}{2} \log -\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{i}{2} \log -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{i}{2} \left[\log 1 - i \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{i}{2} \log \sqrt{5} - \frac{\pi}{4}$$

رشته نمد

(1/10)

2 $w = \frac{-z+1}{z+1} \Rightarrow$

$wz+w = -z+1$
 $z(z+w) = 1-w \Rightarrow z = \frac{1-w}{1+w}$

3 $|z| = \frac{|1-w|}{|1+w|} = 1$

محیط دایره

رابطه میان دایره و دایره در z و w به صورت u و v است

2 $|1+w| = |1-w| \Rightarrow (1+u)^2 + v^2 = (1-u)^2 + v^2$

$1+1 \quad 2u = -2u \Rightarrow -4u = 0 \Rightarrow u = 0$

این دایره دایره z است که $u=0$

انتگرال گیری

14/9/1401

مدرس الزهری
 د. الزهری

زهری